High-rate measurement-device-independent quantum cryptography

高レートの測定装置無依存量子暗号

Stefano Pirandola, Carlo Ottaviani, Gaetana Spedalieri, Christian Weedbrook, Samuel L. Braunstein, Seth Lloyd, Tobias Gehring, Christian S. Jacobsen, and Ulrik L. Andersen

Nature Photonics, **9**, 397-402 (2015)

平野研究室　14-041-022　柄澤真也

本論文の概要

連続変数方式（CV）で
測定装置無依存量子鍵配送(MDI-QKD)を行い、
従来のMDI-QKDよりも
3桁高い鍵生成率を実現した。

CV: Continuous Variable
MDI: Measurement Device Independent
QKD: Quantum Key Distribution

発表の流れ

1.論文の背景

- 1.1 測定装置無依存量子鍵配送（ MDI-QKD ）
- 1.2 連続変数方式（ CV ）
- 1.3 直交位相振幅とコヒーレント状態
- 1.4 ホモダイン検出

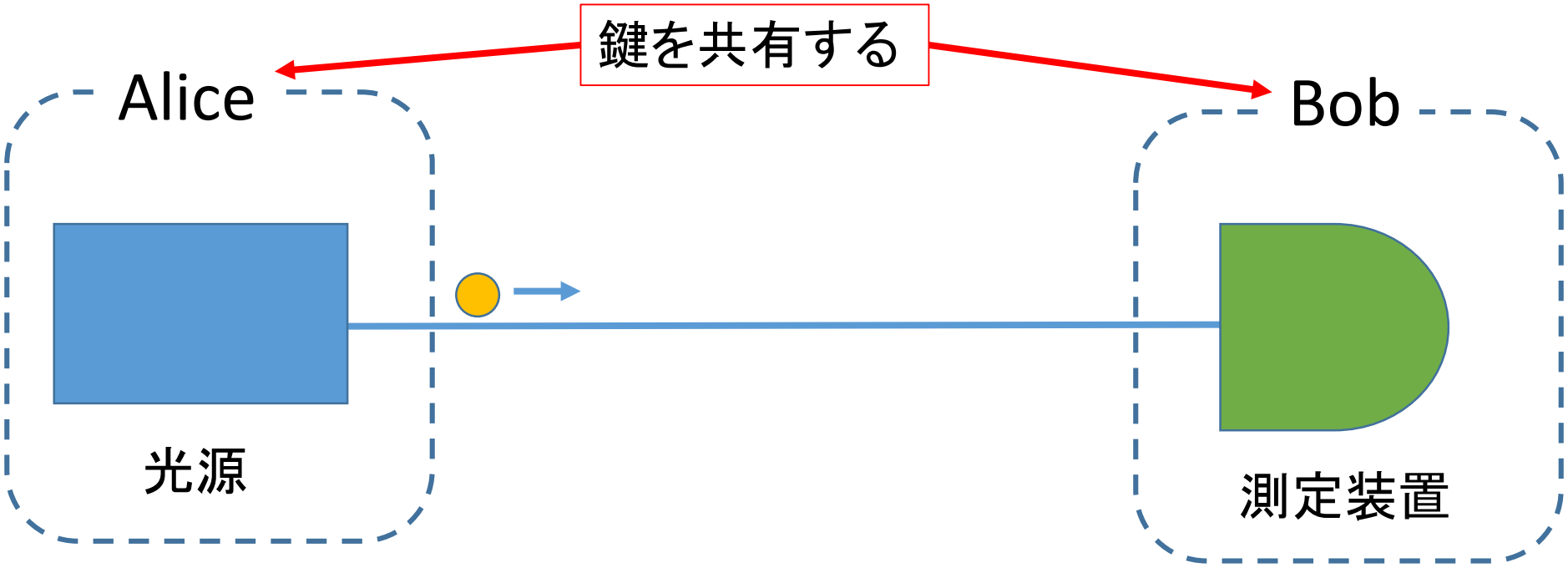
2.本論文の内容

- 2.1 プロトコル（ CV MDI-QKD ）
  - 現実的なCV MDI-QKD
- 2.2 秘密鍵生成率
- 2.3 実験内容
- 2.4 実験結果

3.まとめ

1.1　測定装置無依存量子鍵配送　とは

BB84等の通常の量子鍵配送の場合

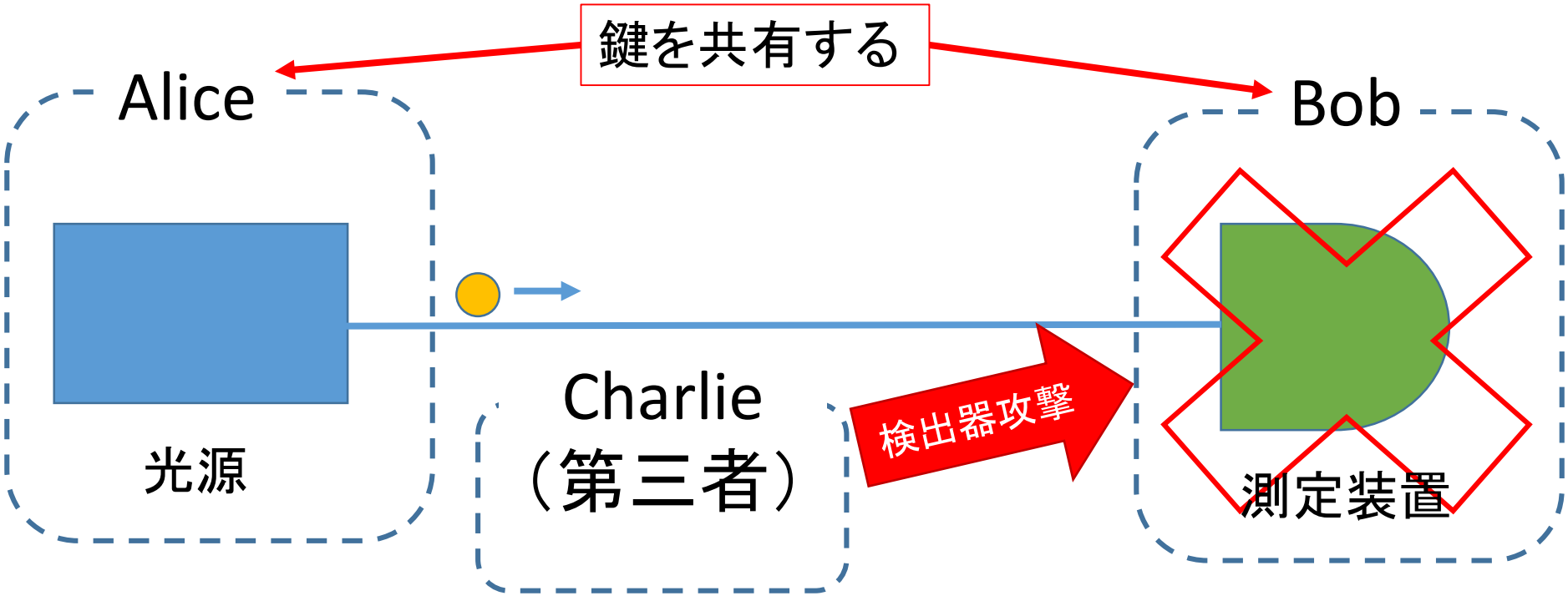


Aliceが光源を持ち、Bobが測定装置を持っている。

測定装置が正常に機能していることを仮定して
量子鍵配送の安全性は理論的に証明されている。

1.1　測定装置無依存量子鍵配送　とは

BB84等の通常の量子鍵配送の場合

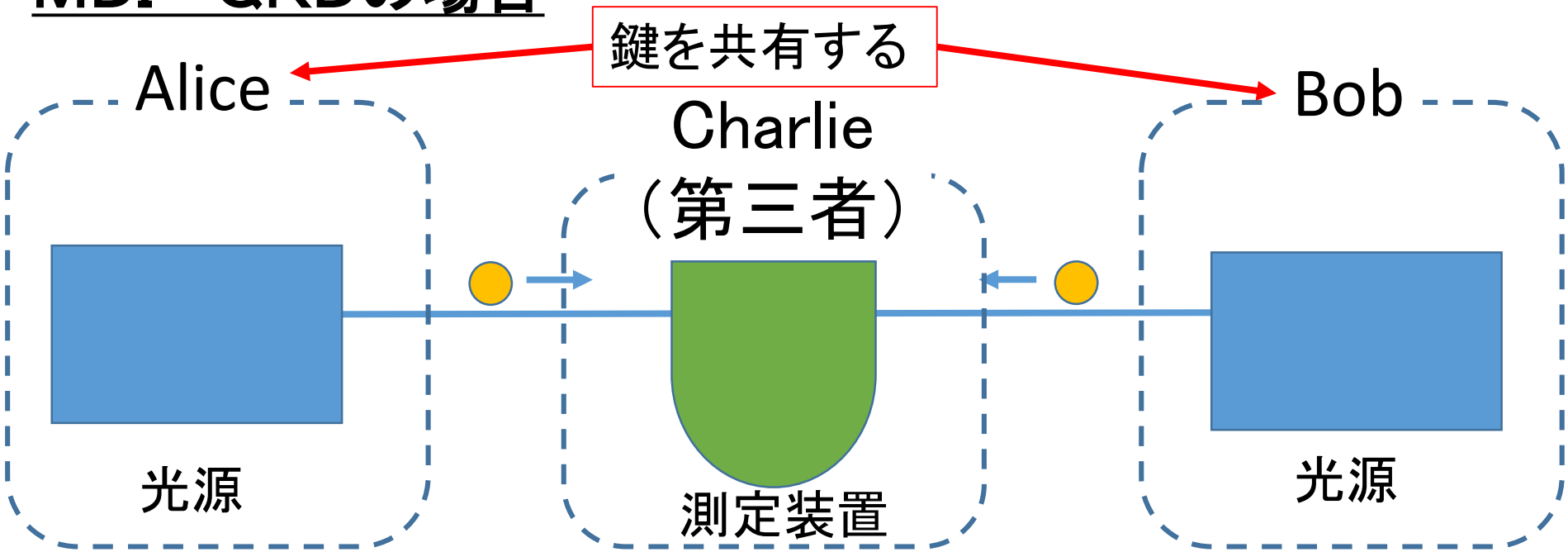


第三者に測定装置が攻撃され、予想外の方法で
情報が洩れる可能性がある。

→現実の装置の安全性を理論的に証明できない

1.1　測定装置無依存量子鍵配送　とは

MDI－QKDの場合



AliceとBobは光源を持ち、
測定装置は第三者のCharlieに預けてしまう。
測定装置が正常に機能していることを仮定しなくても
量子鍵配送の安全性を理論的に証明できる。

Laser:レーザー光源
RNG:乱数生成器
EOM：電気光学変調器
BS:ビームスプリッター
PD:光検出器

測定装置無依存量子鍵配送

Measurement Device Independent-QKD:MDI-QKD

発表の流れ

1.論文の背景

- 1.1 測定装置無依存量子鍵配送（ MDI-QKD ）
- 1.2 連続変数方式（ CV ）
- 1.3 直交位相振幅とコヒーレント状態
- 1.4 ホモダイン検出

2.本論文の内容

- 2.1 プロトコル（ CV MDI-QKD ）
  - 現実的なCV MDI-QKD
- 2.2 秘密鍵生成率
- 2.3 実験内容
- 2.4 実験結果

3.まとめ

1.2　連続変数方式

量子鍵配送の検出方法は、二つに分かれる。

- 離散変数方式（DV）

  単一光子検出を行う

- 連続変数方式（CV）

  ホモダイン検出を行う

連続変数方式は、コヒーレント状態の光を用い、その直交位相振幅の値から鍵を生成する。

発表の流れ

1.論文の背景

- 1.1 測定装置無依存量子鍵配送（ MDI-QKD ）
- 1.2 連続変数方式（ CV ）
- **1.3 直交位相振幅とコヒーレント状態**
- **1.4 ホモダイン検出**

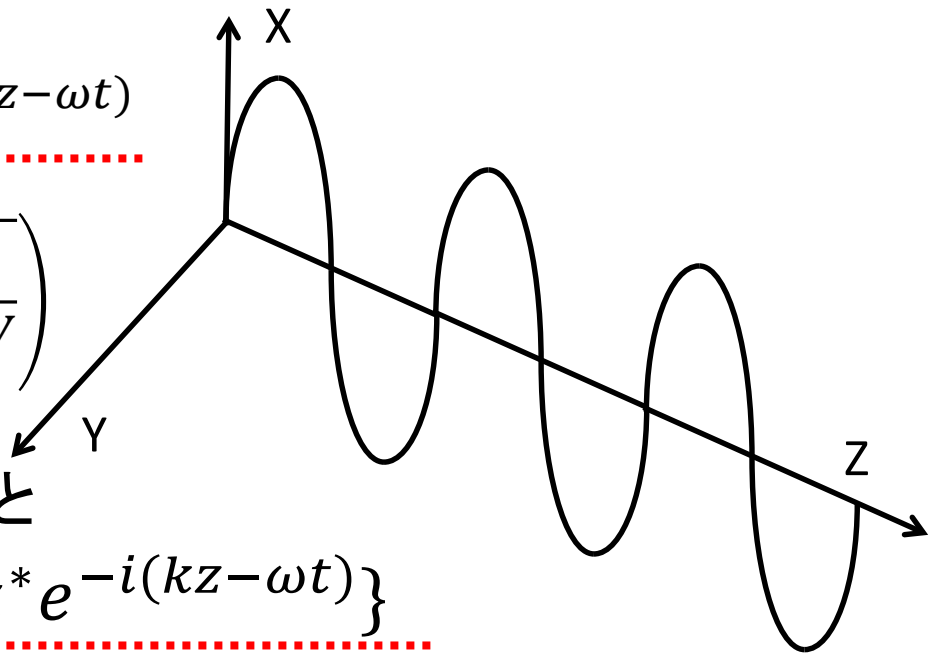
2.本論文の内容

- 2.1 プロトコル（ CV MDI-QKD ）
  - 現実的なCV MDI-QKD
- 2.2 秘密鍵生成率
- 2.3 実験内容
- 2.4 実験結果

3.まとめ

電場の量子化と直交位相振幅

$$E_x(z,t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)} + E_0^* e^{-i(kz-\omega t)}$$



A　次元を表す係数 $\left(A = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\right)$

α, α^* 規格化された複素数

とおくと

$$E_x(z,t) = A\{\alpha e^{i(kz-\omega t)} + \alpha^* e^{-i(kz-\omega t)}\}$$

電磁場を量子力学的調和振動子の集まりとして量子化する

$$\alpha, \alpha^* \longrightarrow \hat{a}, \hat{a}^\dagger$$

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$が成立する

$$\hat{E}_x(z,t) = A\{\hat{a} e^{i(kz-\omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(kz-\omega t)}\}$$

電場を、生成演算子と消滅演算子で書き表せる

電場の量子化と直交位相振幅

直交位相振幅演算子を次のように定義する

$$\begin{cases} \hat{q} = (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}) \\ \hat{p} = -i\,(\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} \hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{q} + i\hat{p}) \\ \hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{2}(\hat{q} - i\hat{p}) \end{array} \right)$$

直交位相振幅演算子はエルミートである

交換関係
$[\hat{q}, \hat{p}\,] = 2i$

不確定性関係
$\Delta q \Delta p \geq 1$

先ほどの式を変形すると

$$\hat{E}_x(z,t) = A\{\hat{q}\cos(kz - \omega t) - \hat{p}\sin(kz - \omega t)\}$$

$\hat{q}$はcos 成分の振幅
$\hat{p}$はsin 成分の振幅

コヒーレント状態と直交位相振幅

生成演算子　$\hat{a}^{\dagger}$

消滅演算子　$\hat{a}$

$$[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$$

消滅演算子の固有状態をコヒーレント状態と定義する。

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad (\alpha\text{は複素数})$$

コヒーレント状態において直交位相振幅は

$$(\Delta q)^2 = 1$$
$$(\Delta p)^2 = 1$$

$$\begin{cases} \hat{q} = (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}) \\ \hat{p} = -i\,(\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}) \end{cases}$$

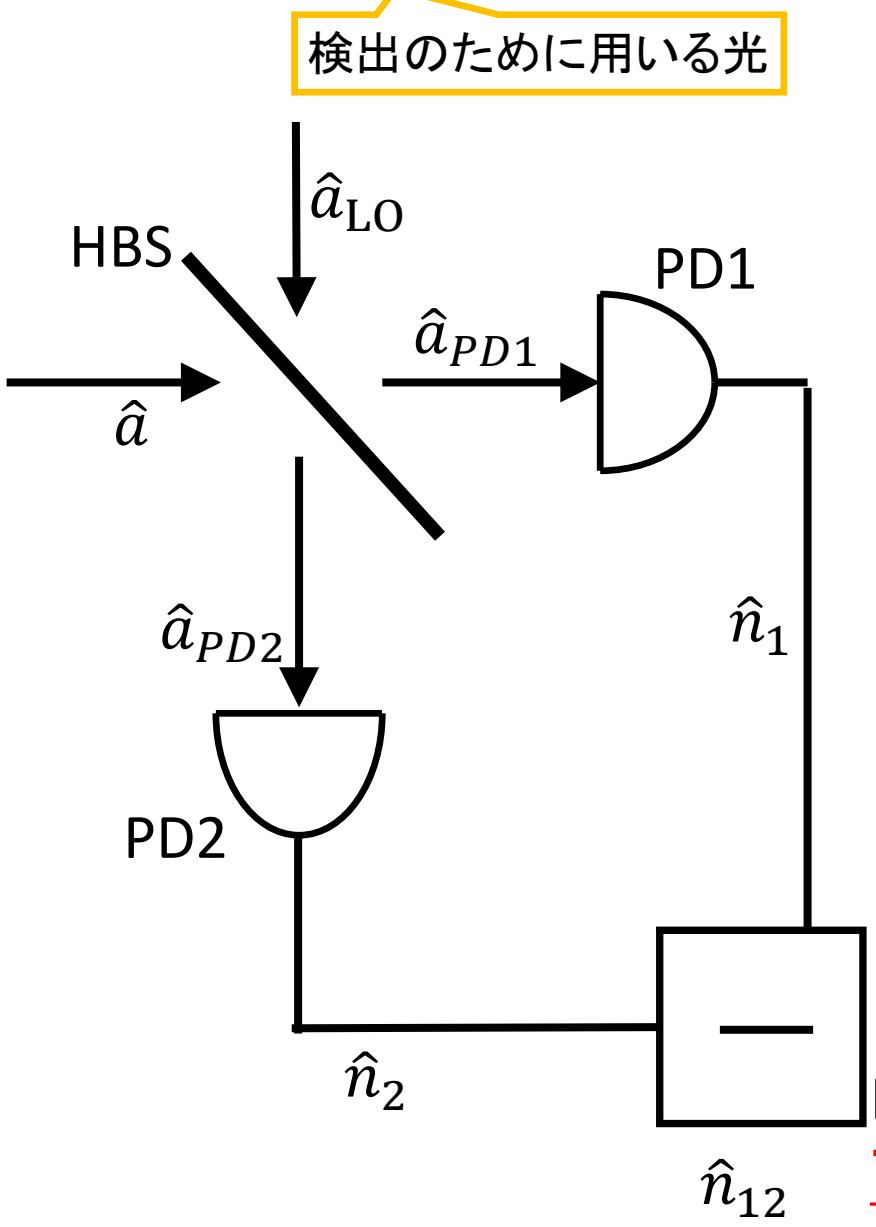
よって

$$\Delta q \Delta p = 1$$

となり、最小不確定状態となっている。

ホモダイン検出

信号光とLO光を重ね合わせてできる2つの**出力の差**を検出する方法



コヒーレント状態のLO光を用いる。

LO光の状態$|\omega\rangle$、位相θ　とする。

観測される光子数演算子$\hat{n}_{12}$は

$$\hat{n}_{12} = \hat{n}_1 - \hat{n}_2$$

$$= \hat{a}_{PD1}{}^{\dagger}\hat{a}_{PD1} - \hat{a}_{PD2}{}^{\dagger}\hat{a}_{PD2}$$

$$= \hat{a}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{LO}} + \hat{a}_{\mathrm{LO}}{}^{\dagger}\hat{a}$$

$\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{q} + i\hat{p})$　のとき

LO光の状態$|\omega\rangle \rightarrow \omega = |\omega|e^{i\theta}$　を用いると

$$\hat{n}_{12} = |\omega|(\hat{q}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta)$$

$\theta = 0$　のとき$\hat{q}$

$\theta = \pi/2$ のとき$\hat{p}$ を測定できる

LO光の位相を変えることで、**信号光の直交位相振幅のどちらかを測定できる**

発表の流れ

1.論文の背景

- 1.1 測定装置無依存量子鍵配送（ MDI-QKD ）
- 1.2 連続変数方式（ CV）
- 1.3 直交位相振幅とコヒーレント状態
- 1.4 ホモダイン検出

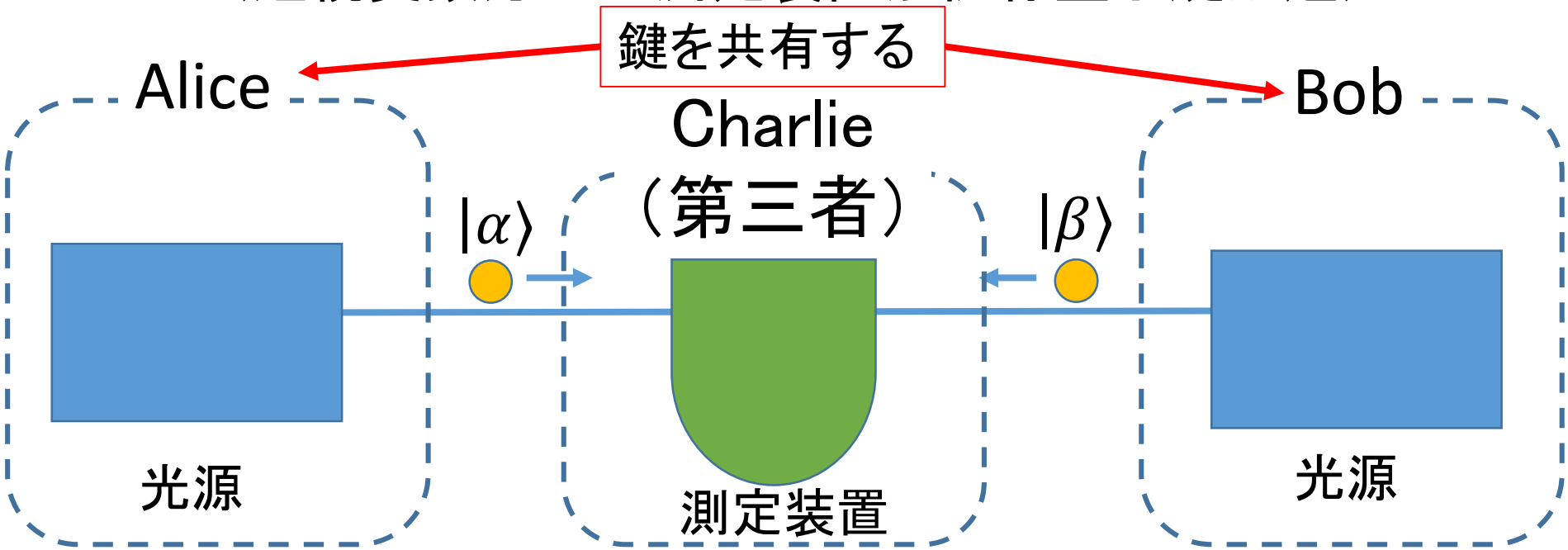
2.本論文の内容

- **2.1 プロトコル（ CV MDI-QKD ）**
  - 現実的なCV MDI-QKD
- 2.2 秘密鍵生成率
- 2.3 実験内容
- 2.4 実験結果

3.まとめ

2.1 プロトコル（CV　MDI-QKD　）

（連続変数方式の測定装置無依存量子鍵配送）



CV　MDI－QKDの手順

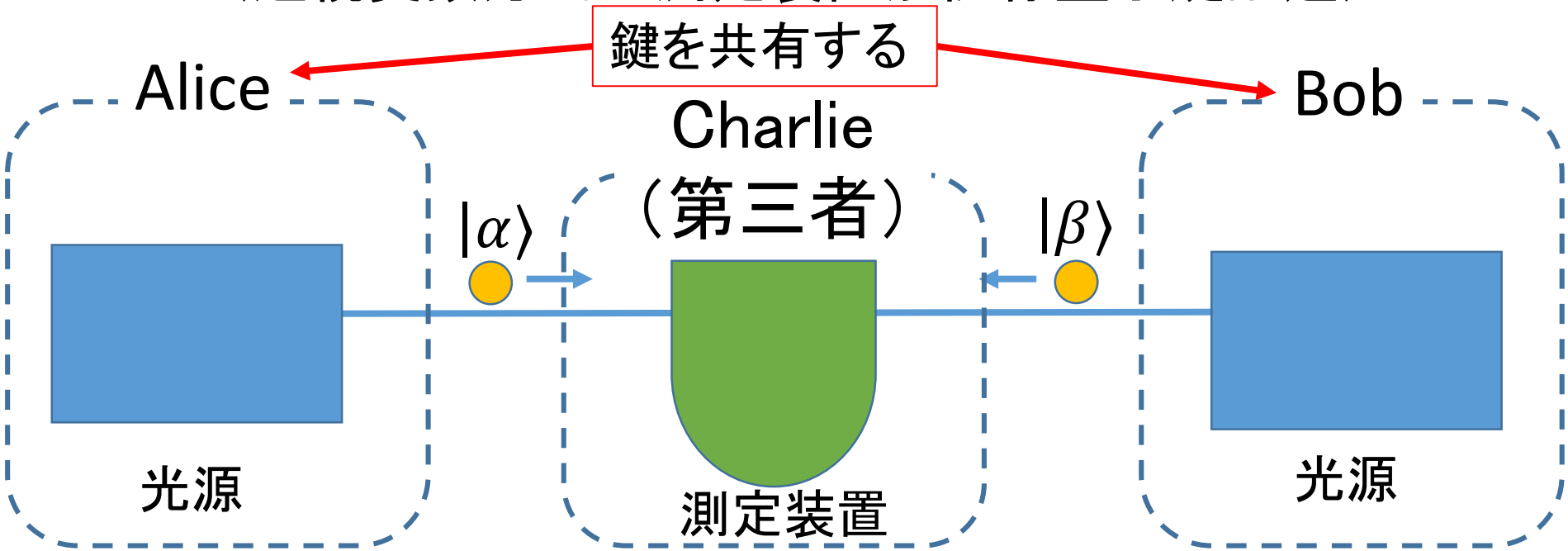
①Alice、Bobはコヒーレント状態$|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$をそれぞれCharlieに送る。

②Charlieは2つの光を干渉させ、出力の直交位相振幅（$\hat{q}_-$と$\hat{p}_+$）をホモダイン検出で観測する。

③$\gamma = (q_- + ip_+)/\sqrt{2}$　をAliceとBobに教え、鍵を生成する。

2.1 プロトコル（CV　MDI-QKD　）

（連続変数方式の測定装置無依存量子鍵配送）



①Alice、Bobはコヒーレント状態$|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$をそれぞれCharlieに送る。

①－1

Alice、Bobは**複素数α、βを**それぞれ

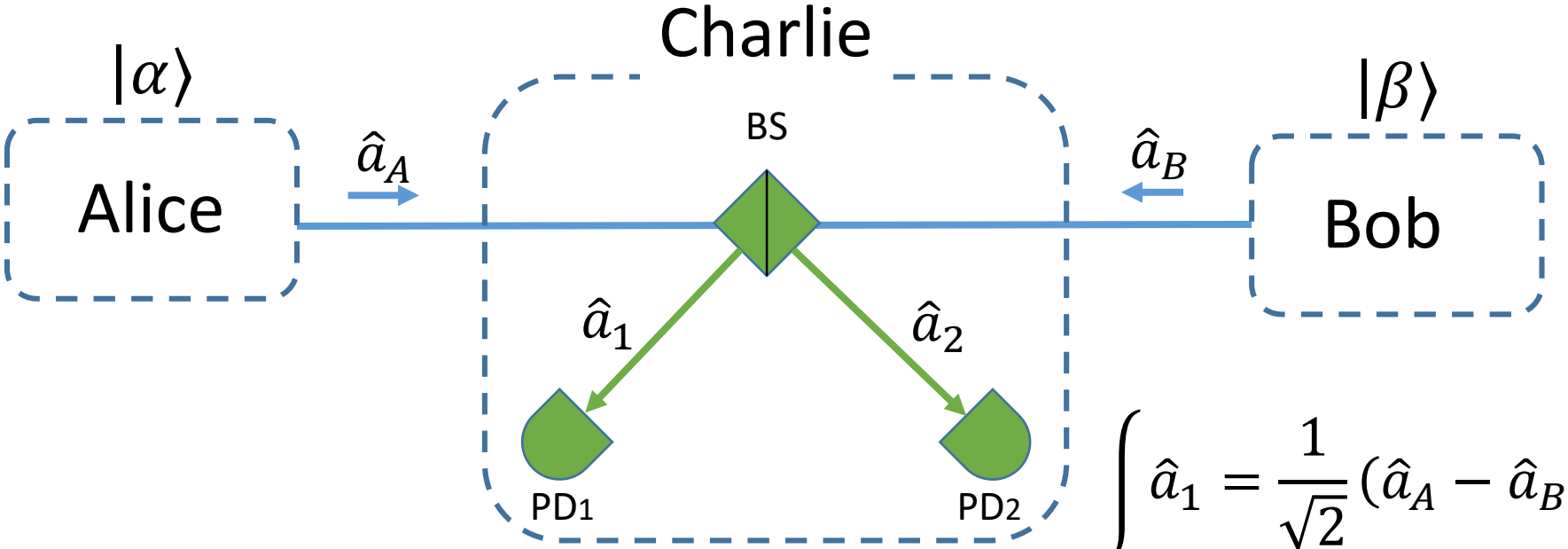
ガウス分布するように**ランダムに選ぶ**

①－2

コヒーレント状態$|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$をつくって、それぞれCharlieに送る

2.1 プロトコル（CV　MDI-QKD　）

②Charlieは2つの光を干渉させ、
直交位相振幅（$\hat{q}_-$と$\hat{p}_+$）をホモダイン検出で観測する。



②－1
AliceとBobから送られてきた2つの光
（消滅演算子$\hat{a}_A, \hat{a}_B$ ）を、BSで干渉させる。

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_A - \hat{a}_B) \\ \hat{a}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_A + \hat{a}_B) \end{cases}$$

②－2
出力光（消滅演算子$\hat{a}_1, \hat{a}_2$）の直交位相振幅$\hat{q}_-$と$\hat{p}_+$をホモダイン検出で観測する。

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{1}{2}(\hat{q}_- + i\hat{p}_-) \\ \hat{a}_2 = \dfrac{1}{2}(\hat{q}_+ + i\hat{p}_+) \end{cases}$$

2.1 プロトコル（CV　MDI-QKD　）

③ $\gamma = (q_- + ip_+)/\sqrt{2}$　をAliceとBobに教え、鍵を生成する。

それぞれ、以下の関係で表される。

$$
\begin{aligned}
&(\hat{q}_- + i\hat{p}_+)/\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_A - \hat{q}_B) + i\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_A + \hat{p}_B)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{(\hat{q}_A + i\hat{p}_A) - (\hat{q}_B - i\hat{p}_B)\} \\
&= \frac{1}{2}\left(2\hat{a}_A - 2\hat{a}^{\dagger}{}_B\right) \\
&= \hat{a}_A - \hat{a}^{\dagger}{}_B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{q}_- = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_A - \hat{q}_B) \\
\hat{p}_+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_A + \hat{p}_B)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{a}_A = \dfrac{1}{2}(\hat{q}_A + i\hat{p}_A) \\
\hat{a}_B = \dfrac{1}{2}(\hat{q}_B + i\hat{p}_B)
\end{cases}
$$

$$\gamma = \alpha - \beta^* + \delta$$

δ：測定雑音

2.1 プロトコル（CV　MDI-QKD　）

③$\gamma=(q_- + ip_+)/\sqrt{2}$をAliceとBobに教え、鍵を生成する。

$\gamma=\alpha-\beta^*+\delta$　　δ：測定雑音

をCharlieはAliceとBobに教え、AliceとBobはγを知る。

例えば、Bobは

$$\beta^*+\gamma=\alpha+\delta$$

のように、Aliceの変数を推定できる。

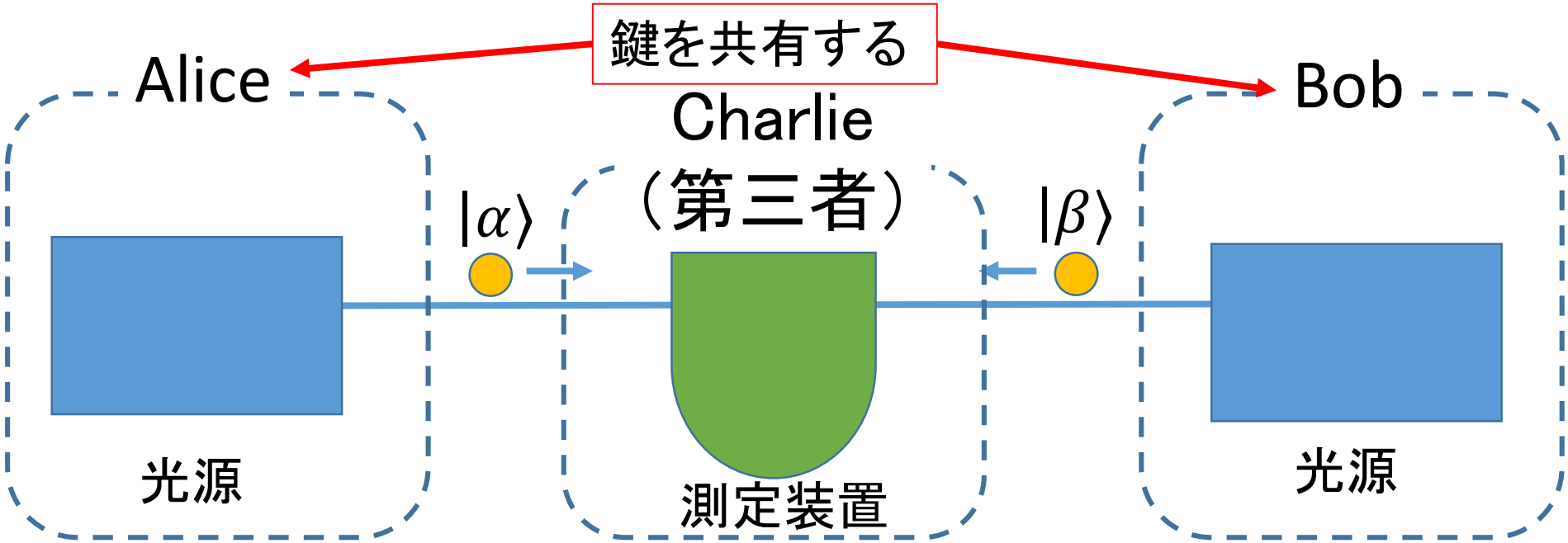
➡AliceとBobは相関のある変数を共有する。

例：α　と　$\beta^*+\gamma=\alpha+\delta$

➡AliceとBobで情報を共有でき、
秘密鍵を作ることができる。

2.1 プロトコル（CV　MDI-QKD　）

（連続変数方式の測定装置無依存量子鍵配送）



CV　MDI－QKDの手順

①Alice、Bobはコヒーレント状態$|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$をそれぞれCharlieに送る。

②Charlieは2つの光を干渉させ、出力の直交位相振幅（$\hat{q}_-$と$\hat{p}_+$）を
ホモダイン検出で観測する。

③$\gamma=(q_- + ip_+)/\sqrt{2}=\alpha-\beta^* + \delta$をAliceとBobに教え、鍵を生成する

発表の流れ

1.論文の背景

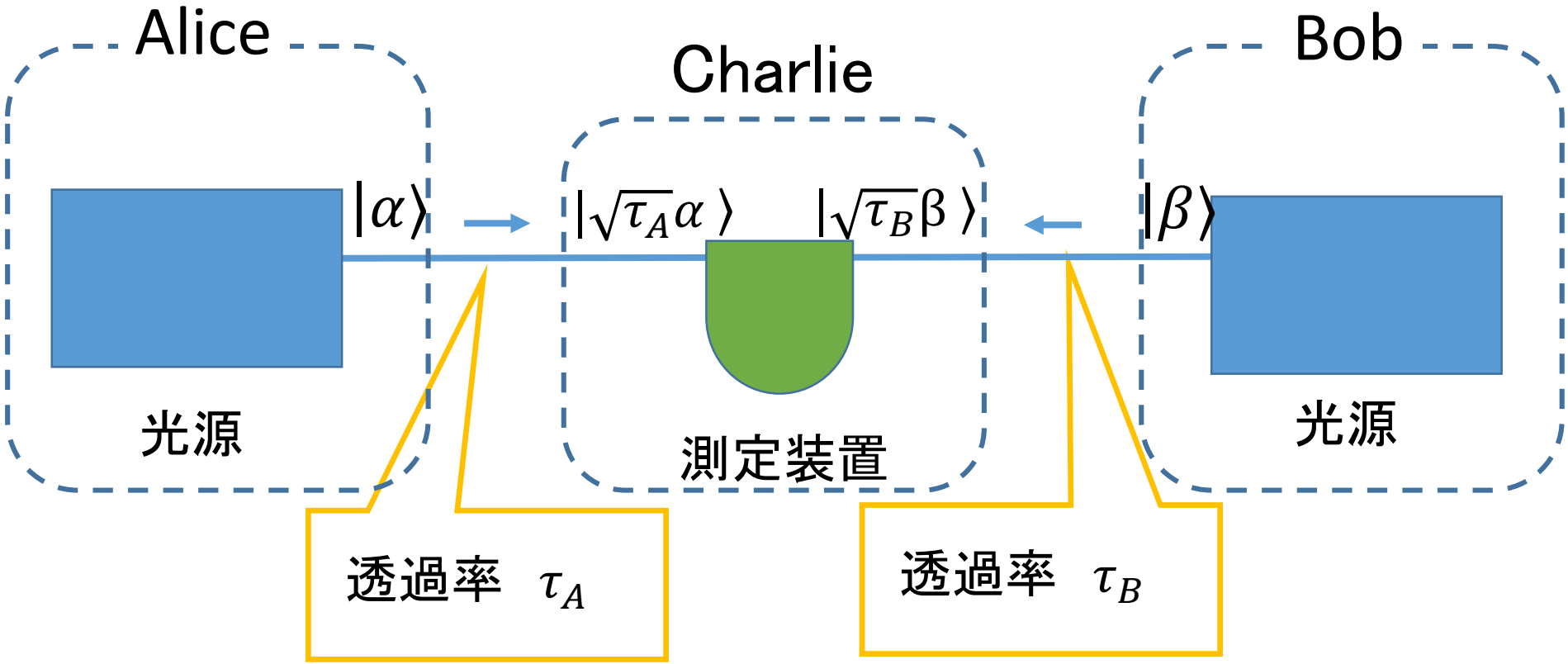
- 1.1 測定装置無依存量子鍵配送（ MDI-QKD ）
- 1.2 連続変数方式（ CV ）
- 1.3 直交位相振幅とコヒーレント状態
- 1.4 ホモダイン検出

2.本論文の内容

- 2.1 プロトコル（ CV MDI-QKD ）
  - 現実的なCV MDI-QKD
- 2.2 秘密鍵生成率
- 2.3 実験内容
- 2.4 実験結果

3.まとめ

現実的なCV MDI-QKD



一般的なファイバーでは -0.2dB/km

例：距離が1kmのとき透過率は0．935

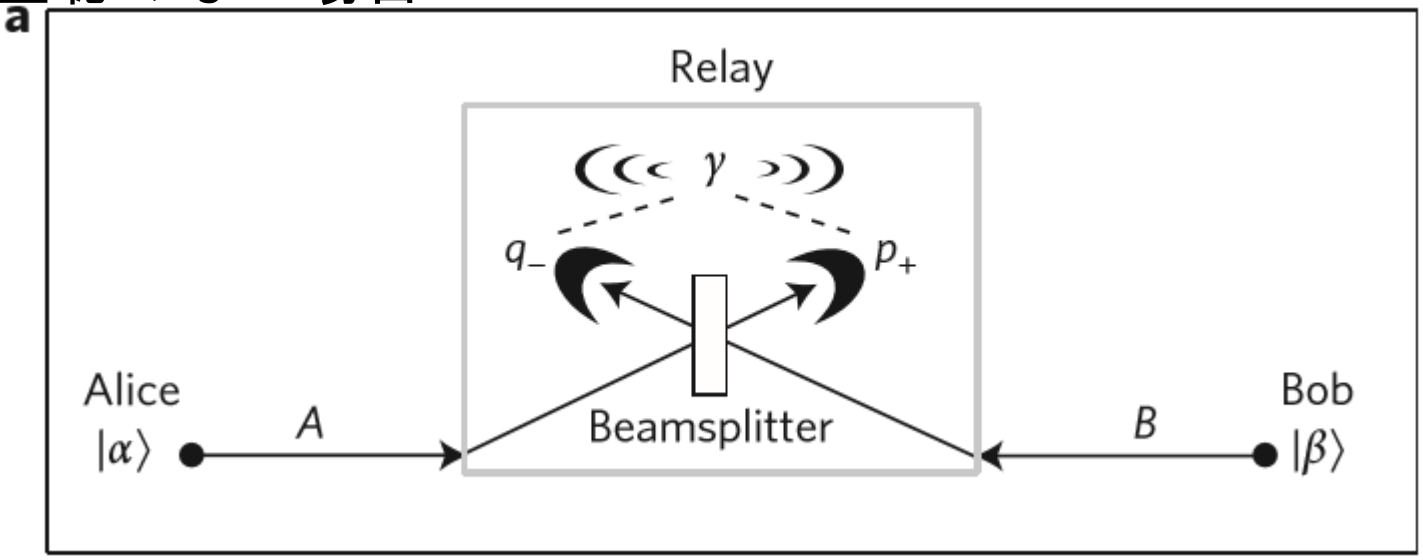
50kmのとき透過率は0．1

過剰雑音：$\varepsilon = \dfrac{(\Delta q)^2{}_{obs}}{(\Delta q)^2} - 1$ $\quad (\Delta q)^2{}_{obs} = (1+\varepsilon)(\Delta q)^2$

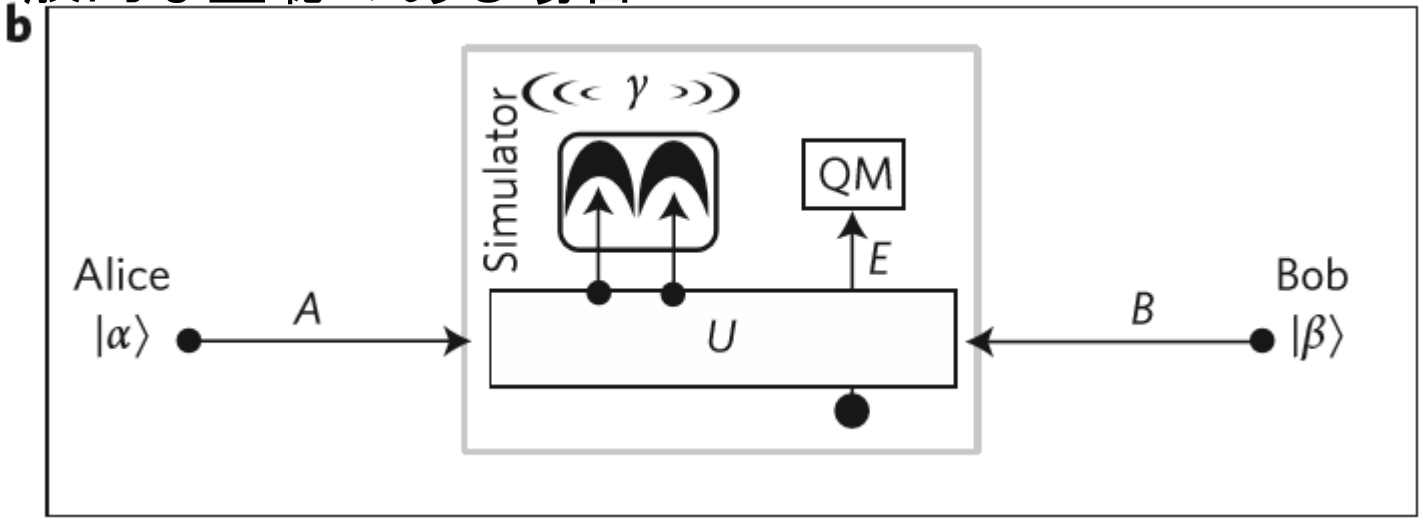
現実的なCV MDI-QKD

盗聴について

盗聴のない場合



一般的な盗聴のある場合



発表の流れ

1.論文の背景

- 1.1 測定装置無依存量子鍵配送（ MDI-QKD ）
- 1.2 連続変数方式（ CV）
- 1.3 直交位相振幅とコヒーレント状態
- 1.4 ホモダイン検出

2.本論文の内容

- 2.1 プロトコル（ CV MDI-QKD ）
  - 現実的なCV MDI-QKD
- 2.2 秘密鍵生成率
- 2.3 実験内容
- 2.4 実験結果

3.まとめ

秘密鍵生成率R　の導入

秘密鍵生成率R

$$R = I_{AB} - I_E$$

I_{AB}:AliceとBobの相互情報量

I_E:Charlieの盗んだ情報の上限

$\mathrm{R} > 0$　ならば、R bitの秘密鍵を生成する

$\mathrm{R} < 0$　ならば、秘密鍵は生成できない

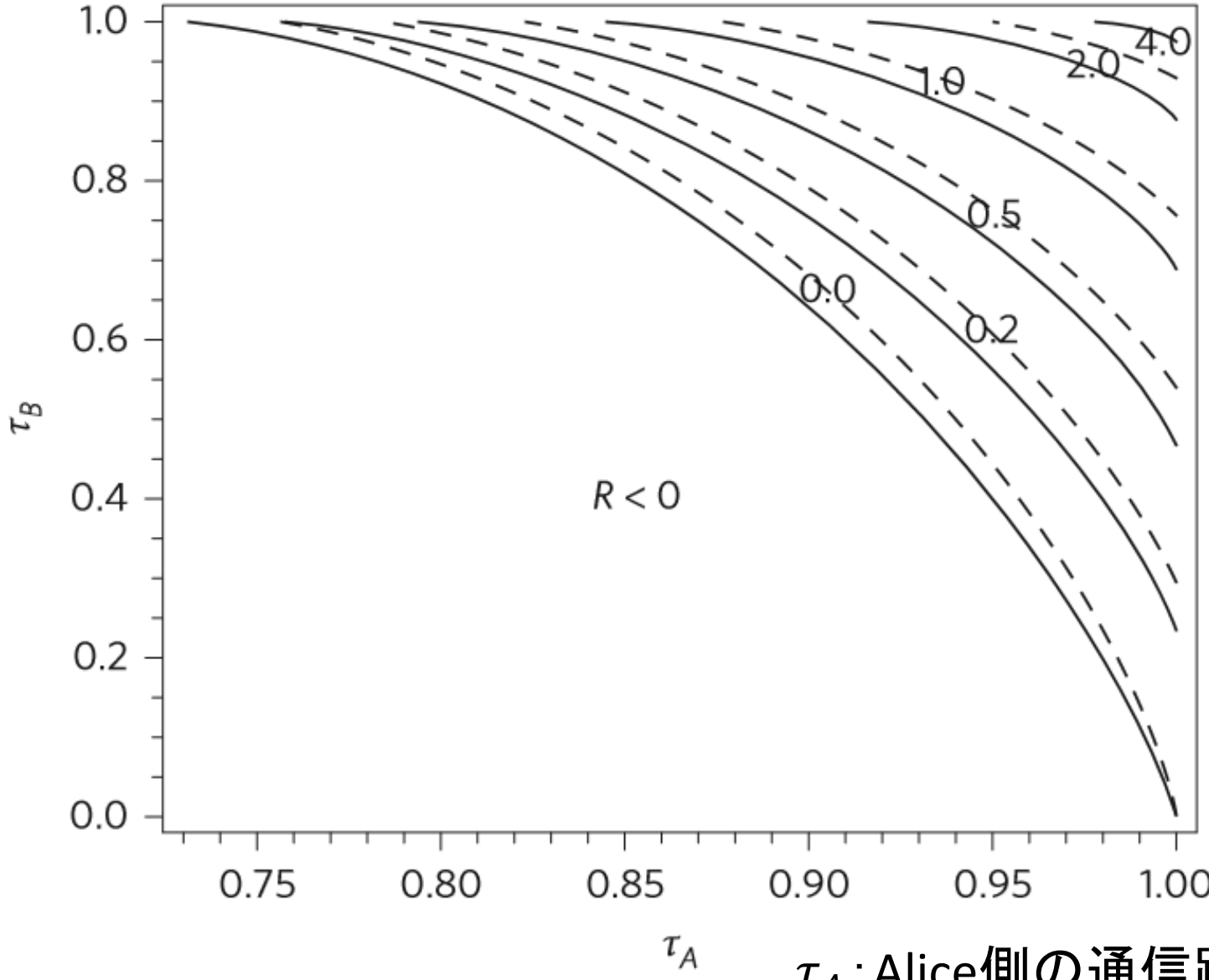
ただし、AliceとBobが共有した情報（相関を持った変数）から理論的な上限で鍵を作ることは難しいので

リコンシリエーション（調整）効率　$\xi \leq 1$

を導入する

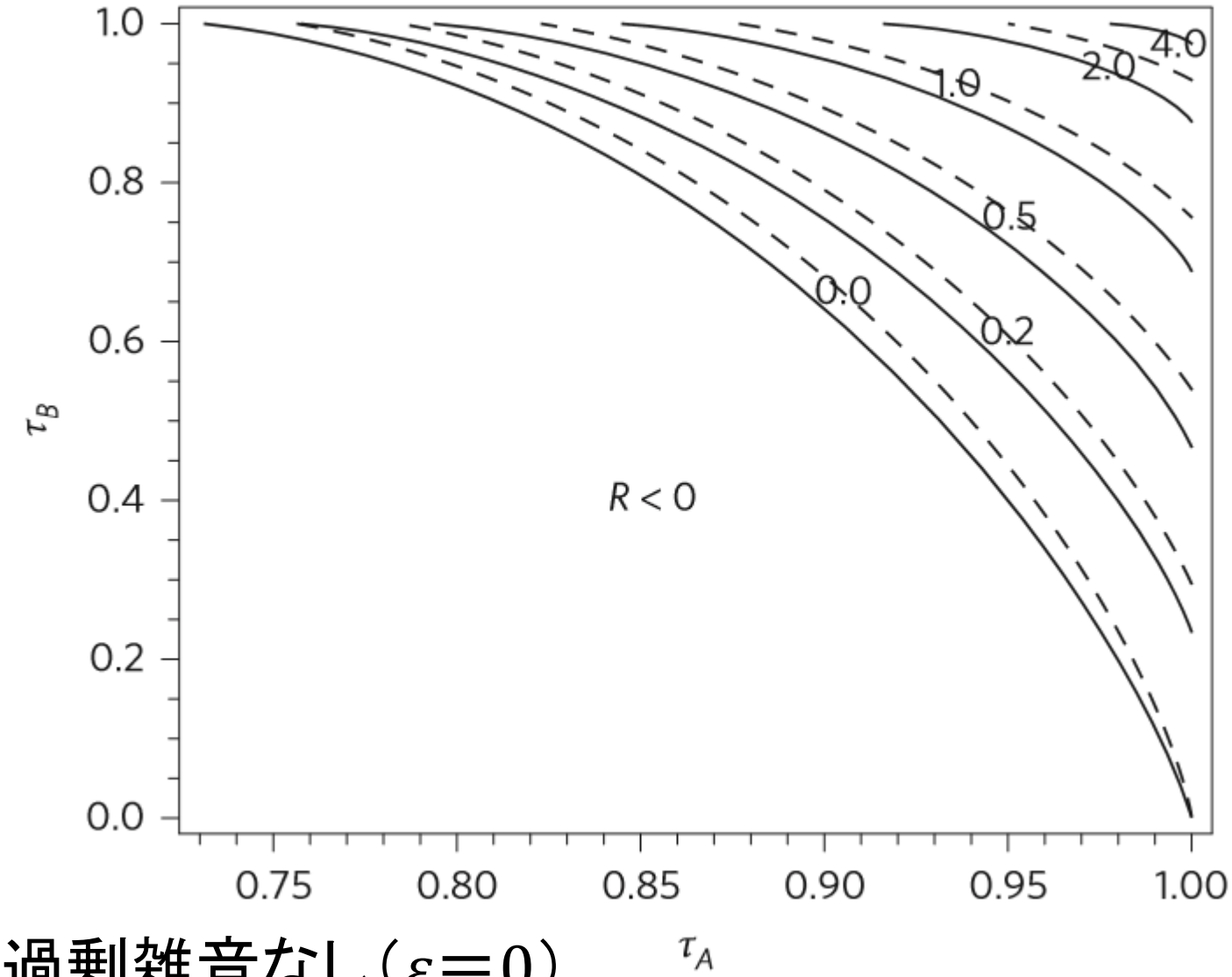
$$\mathbf{R = \xi I_{AB} - I_E}$$

1回あたりの秘密鍵生成率Rと透過率の関係



τ_A : Alice側の通信路の透過率

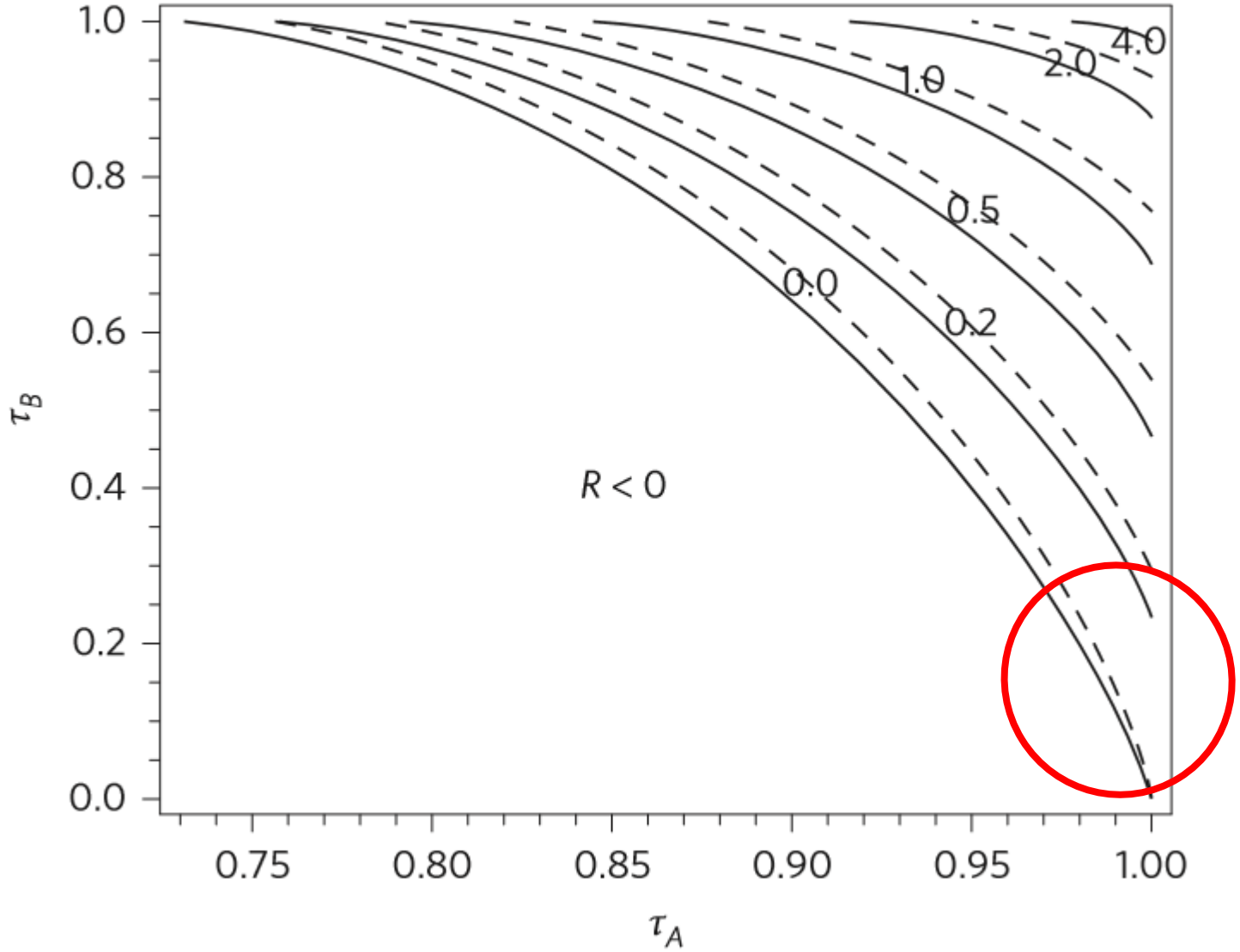
τ_A : Bob側の通信路の透過率



実線：過剰雑音なし（$\varepsilon = 0$）

破線：5%過剰雑音がある場合（$\varepsilon = 0.05$）

過剰雑音がある場合、透過率が高くないと鍵が生成できない



τ_Aが 1 に近い値のとき τ_Bが0 に近い値でも鍵を生成可能

→Alice側の通信路をできるだけ短くしたほうが良い

発表の流れ

1.論文の背景

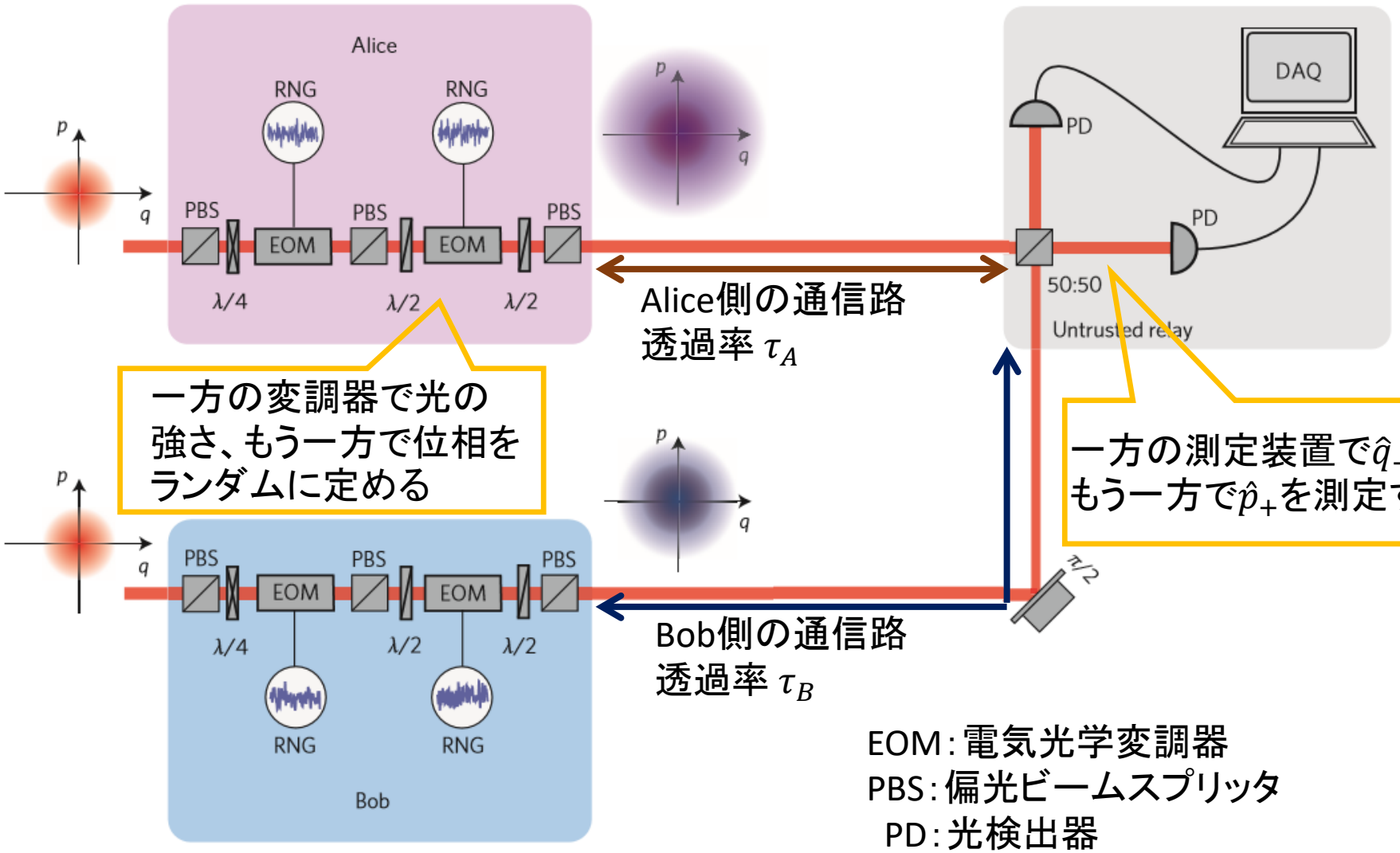
- 1.1 測定装置無依存量子鍵配送（ MDI-QKD ）
- 1.2 連続変数方式（ CV）
- 1.3 直交位相振幅とコヒーレント状態
- 1.4 ホモダイン検出

2.本論文の内容

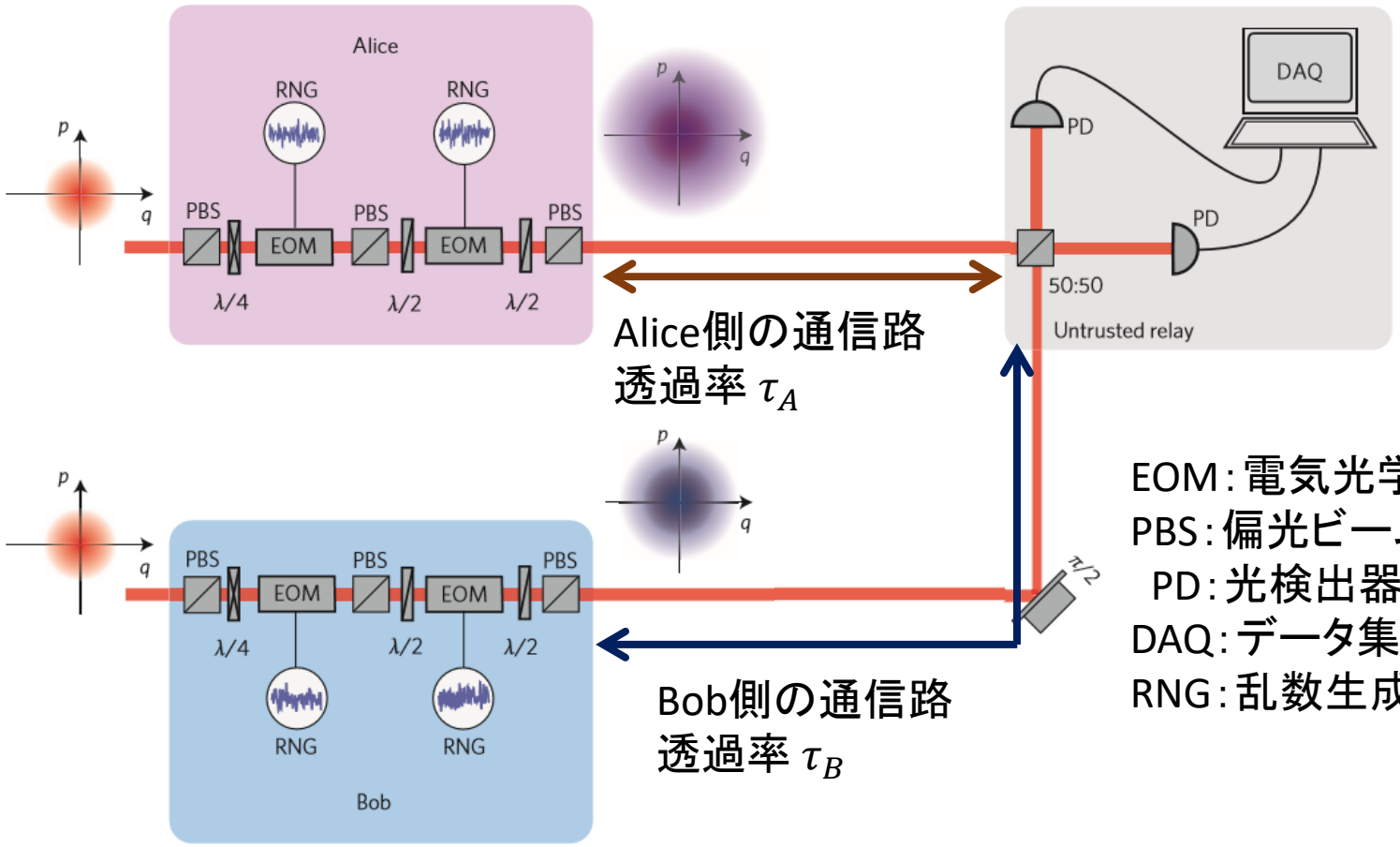
- 2.1 プロトコル（ CV MDI-QKD ）
  - 現実的なCV MDI-QKD
- 2.2 秘密鍵生成率
- 2.3 実験内容
- 2.4 実験結果

3.まとめ

2.3 実験内容



EOM：電気光学変調器
PBS：偏光ビームスプリッタ
PD：光検出器
DAQ：データ集録
RNG：乱数生成器



EOM：電気光学変調器
PBS：偏光ビームスプリッタ
PD：光検出器
DAQ：データ集録
RNG：乱数生成器

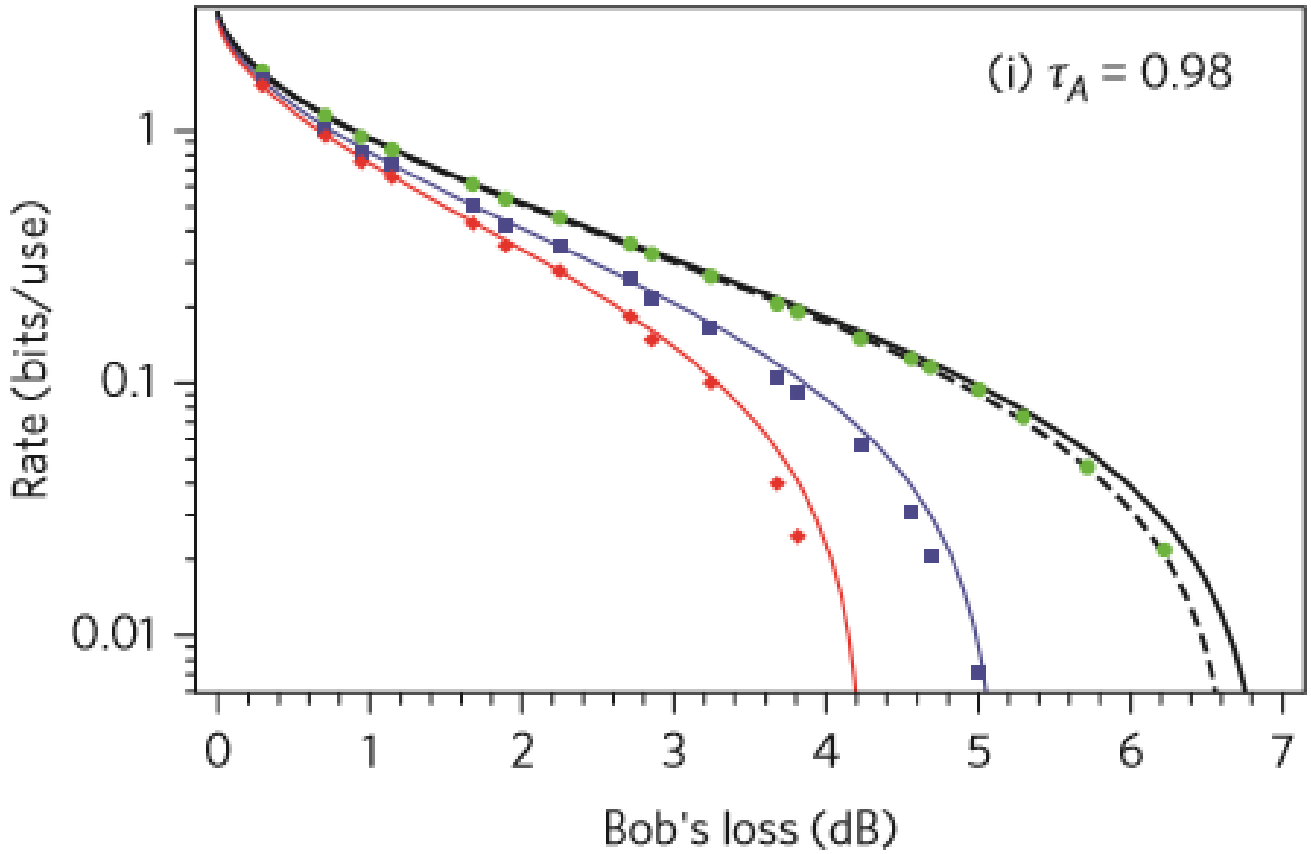
<u>Alice側の通信路について</u>
通信路の距離の短い場合
特に下記の3つについて実験を行う。

(i) $\tau_A \simeq 0.98$　：短い自由空間の通信路で接続
　　損失は中継点での検出効率によるもの
(ii) $\tau_A \simeq 0.975$ ：通信路が100m相当の損失
(iii) $\tau_A \simeq 0.935$ ：通信路が1km相当の損失

<u>Bob側の通信路について</u>
通信路の距離の長い場合
について実験を行う。

Alice側の(i)～(iii)それぞれに対してτ_Bを変化させる。

2.4 実験結果



透過率 $\tau_A \simeq 0.98$の場合

ξ：調整効率、ε：過剰雑音

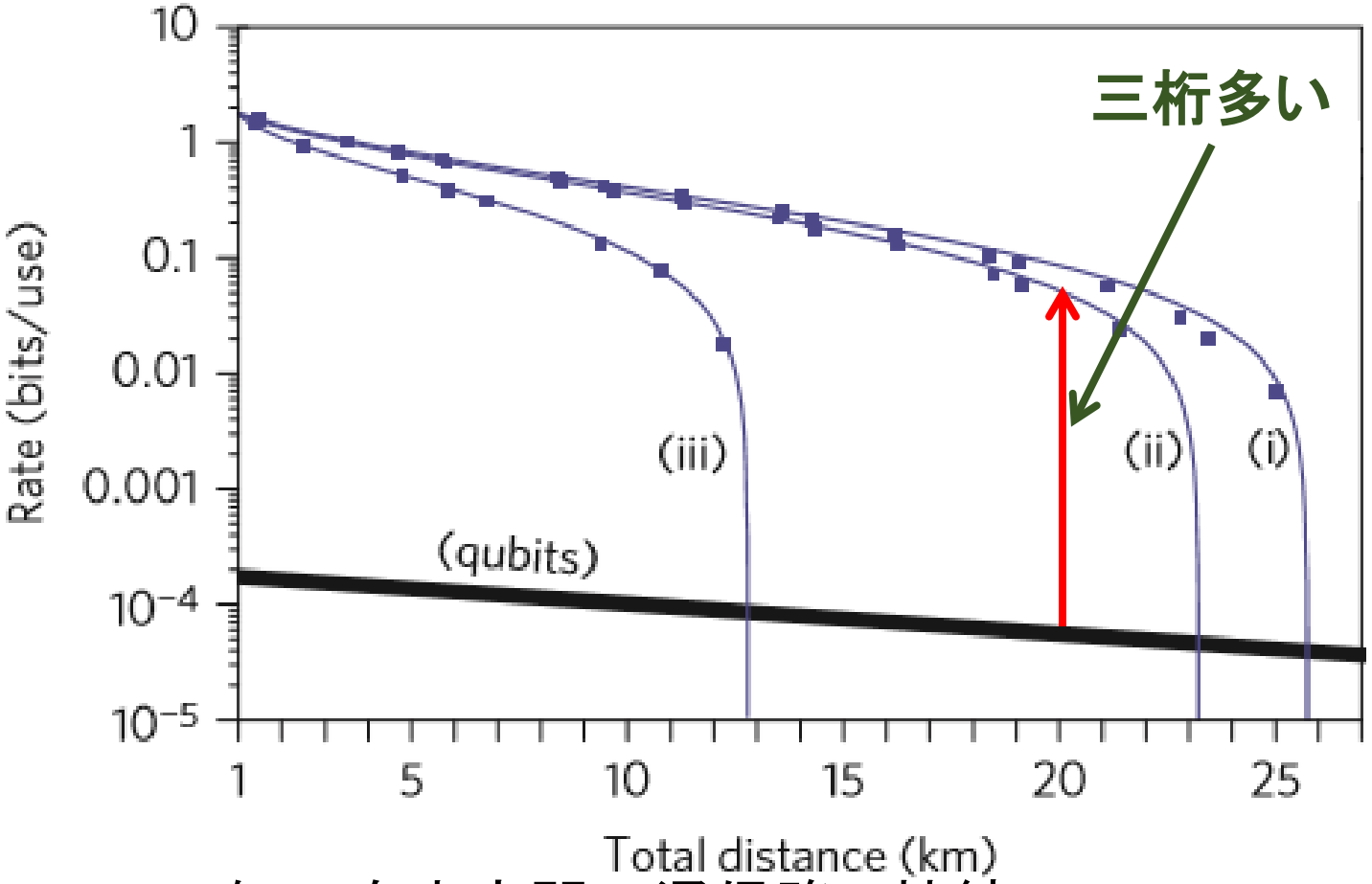
実験点（点）

ξ＝1（緑色の円）、ξ≃ 0.97（青色の四角形）、ξ≃ 0.95（赤色の菱形）

理論値R（線）

ξ= 1およびε= 0（黒い実線）、ξ= 1およびε≃ 0.01（破線の黒い線）、

ξ≃ 0.97およびε= 0（青い線）、ξ≃ 0.95およびε= 0（赤線）。



(i) $\tau_A \simeq 0.98$ ：短い自由空間の通信路で接続
損失は中継点での検出効率によるもの

(ii) $\tau_A \simeq 0.975$ ：通信路が100m相当の損失

(iii) $\tau_A \simeq 0.935$ ：通信路が1km相当の損失

について、1回あたりの鍵生成率をプロット（$\xi \simeq 0.97$、青色の四角）

・離散変数方式のMDI-QKDが達成できる鍵生成率**（太い実線）**

まとめ

・測定装置無依存量子鍵配送（MDI-QKD）は、測定装置を第三者に預けることで、安全性を高めた量子鍵配送の方法。

・連続変数方式（CV）MDI-QKDは、AliceとBobがコヒーレント状態$|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$を送り、Charlieが$\boldsymbol{\gamma = \alpha - \beta^* + \delta}$を伝えて（$\delta$は雑音）、鍵を生成する。

・連続変数方式でMDI-QKDを行った本論文では、離散変数方式のMDI-QKDよりも3桁高い鍵生成率（1回あたり）を実現した。

コヒーレント状態

消滅演算子の固有状態として定義する。

$$|\alpha>= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n>$$

①直交位相振幅は最小不確定性状態である。

②直交位相振幅の不確定性はそれぞれ等しい。

CV MDI-QKD について(プロトコル)

①Alice、Bobはコヒーレント状態$|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$
をそれぞれCharlieに送る。

複素数α、βをランダムに選ぶ

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(q_A + ip_A) \\ \beta = \frac{1}{2}(q_B + ip_B) \end{cases}$$

例

Alice	**Bob**
$\alpha_1 = 1.1 + 2.2i$	$\beta_1 = -2.3 + 1.4i$
$\alpha_2 = -2.4 + 1.1i$	$\beta_2 = 5.3 - 0.3i$
$\alpha_3 = 6.5 - 4.0i$	$\beta_3 = -1.5 - 2.1i$

CV MDI-QKD について(プロトコル)

①Alice、Bobはコヒーレント状態$|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$
をそれぞれCharlieに送る。

Alice	Bob	Charlie	Bobの知りうる値($\beta^* + \gamma$)
$\alpha_1 = 1.1 + 2.2i$	$\beta_1 = -2.3 + 1.4i$	$\gamma_1 = 3.6 + 3.4i$	$1.3 + 2.0i$
$\alpha_2 = -2.4 + 1.1i$	$\beta_2 = 5.3 - 0.3i$	$\gamma_2 = -8.4 + 0.9i$	$-2.7 + 1.2i$
$\alpha_3 = 6.5 - 4.0i$	$\beta_3 = -1.5 - 2.1i$	$\gamma_3 = 8.1 - 6.3i$	$6.6 - 4.2i$

δ(測定雑音)
0.2-0.2i
-0.3+0.1i
$0.1 - 0.2i$

CV MDI-QKD について(プロトコル)

③ $\gamma=(q_- + ip_+)/\sqrt{2}$ をAliceとBobに教え、鍵を生成する。

$$\gamma=\alpha-\beta^*+\delta$$

例 Bob が$\beta^*+\gamma$ （$=\alpha+\delta$） を計算する

Bobの知りうる値($\beta^*+\gamma$)	$\boldsymbol{Alice}$
${\beta_1}^*+\gamma_1=1.3+2.0i$	$\alpha_1=1.1+2.2i$
${\beta_2}^*+\gamma_2=-2.7+1.2i$	$\alpha_2=-2.4+1.1i$
${\beta_3}^*+\gamma_3=6.6-4.2i$	$\alpha_3=6.5-4.0i$

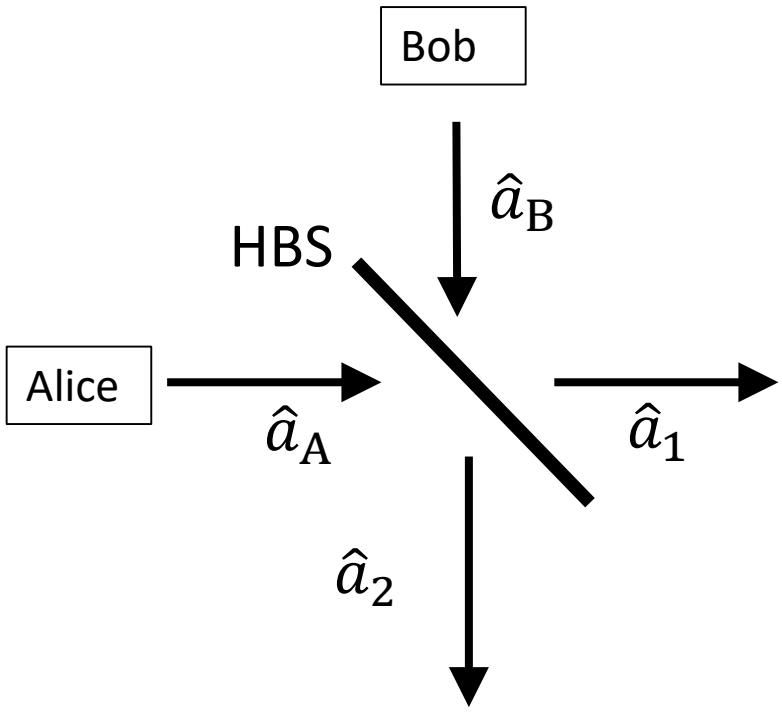
Charlie
$\gamma_1=3.6+3.4i$
$\gamma_2=-8.4+0.9i$
$\gamma_3=8.1-6.3i$

δ(測定雑音)
0.2-0.2i
-0.3+0.1i
$0.1-0.2i$

AliceとBobは相関のある変数を共有する。
AliceとBobで情報を共有でき、
秘密鍵を作ることができる。

CV MDI-QKD（入射部分）

HBS：ハーフビームスプリッター



$$\begin{cases} \hat{a}_A = \frac{1}{2}(\hat{q}_A + i\hat{p}_A) \\ \hat{a}_B = \frac{1}{2}(\hat{q}_B + i\hat{p}_B) \\ \hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_A - \hat{a}_B) \\ \hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_A + \hat{a}_B) \end{cases}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_A + \hat{a}_B)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{q}_A + i\hat{p}_A + \hat{q}_B + i\hat{p}_B)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_A + \hat{q}_B) + i\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_A + \hat{p}_B)\right)$$

$$= \hat{q}_+ \qquad = \hat{p}_+$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{q}_+ + i\hat{p}_+)$$

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \frac{1}{2}(\hat{q}_- + i\hat{p}_-) \\ \hat{a}_2 = \frac{1}{2}(\hat{q}_+ + i\hat{p}_+) \end{cases}$$

ホモダイン検出と直交位相振幅

$$\hat{n}_{12} = \hat{n}_1 - \hat{n}_2 = \hat{a}_1{}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{LO}} + \hat{a}_{\mathrm{LO}}{}^{\dagger}\hat{a}_1$$

入力の状態$|\psi\rangle$、$|\omega\rangle$（LO光はコヒーレント状態） として

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}_{12}\rangle &= \langle\psi|\langle\omega|(\hat{n}_{12})|\omega\rangle|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\langle\omega|\left(\hat{a}_1{}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{LO}} + \hat{a}_{\mathrm{LO}}{}^{\dagger}\hat{a}_1\right)|\omega\rangle|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\hat{a}_1{}^{\dagger}|\psi\rangle\cdot\langle\omega|\hat{a}_{\mathrm{LO}}|\omega\rangle + \langle\omega|\hat{a}_{\mathrm{LO}}{}^{\dagger}|\omega\rangle\cdot\langle\psi|\hat{a}_1|\psi\rangle \\ &= \omega\langle\psi|\hat{a}_1{}^{\dagger}|\psi\rangle + \omega^*\langle\psi|\hat{a}_1|\psi\rangle\end{aligned}$$

$\hat{a}_1 = \frac{1}{2}(\hat{q}_- + i\hat{p}_-)$　$\omega = |\omega|e^{i\theta}$　を用いると

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}_{12}\rangle &= \tfrac{1}{2}|\omega|e^{i\theta}\langle\psi|\hat{q}_- - i\hat{p}_-|\psi\rangle + \tfrac{1}{2}|\omega|e^{-i\theta}\langle\psi|\hat{q}_- + i\hat{p}_-|\psi\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}|\omega|(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\langle\psi|\hat{q}_-|\psi\rangle - \tfrac{i}{2}|\omega|(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\langle\psi|\hat{p}_-|\psi\rangle \\ &= |\omega|\langle\psi|\,(\hat{q}_-\cos\theta + \hat{p}_-\sin\theta)\,|\psi\rangle\end{aligned}$$

$$\hat{n}_{12} = |\omega|(\hat{q}_-\cos\theta + \hat{p}_-\sin\theta)$$

2.2 理論的な値

秘密鍵生成率R(τ_A,τ_B,ε)の式

$$\mathrm{R}(\tau_A,\tau_B,\varepsilon)$$

$$=\log_2\left[\frac{2(\tau_A+\tau_B)}{e|\tau_A+\tau_B|\chi}\right]+\mathrm{h}\left[\frac{\tau_A\chi}{\tau_A+\tau_B}-1\right]-$$

$$h\left[\frac{\tau_A\tau_B\chi-(\tau_A+\tau_B)^2}{|\tau_A-\tau_B|(\tau_A+\tau_B)}\right]$$

τ_A,τ_B:**透過率**　χ：等価ノイズ
ε：余分なノイズ

2.2 理論的な値

秘密鍵生成率R$(\tau_A,\tau_B,\varepsilon)$の式

$$\mathrm{R}(\tau_A,\tau_B,\varepsilon)$$

$$=\log_2\left[\frac{2(\tau_A+\tau_B)}{e|\tau_A+\tau_B|\chi}\right]+\mathrm{h}\left[\frac{\tau_A\chi}{\tau_A+\tau_B}-1\right]-$$

$$h\left[\frac{\tau_A\tau_B\chi-(\tau_A+\tau_B)^2}{|\tau_A-\tau_B|(\tau_A+\tau_B)}\right]$$

$$\mathrm{h}:=\frac{x+1}{2}\log_2\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{2}\log_2\frac{x-1}{2}$$